

*Kan elever förbättra sin
problemlösningsförmåga med hjälp av
grafräknare?*

Tomas Bergqvist

Research reports, No 4, 1998
in Mathematics Education

Kan elever förbättra sin problemlösningsförmåga med hjälp av grafräknare?

Tomas Bergqvist

SAMMANFATTNING. I denna artikel diskuteras den roll som problemlösning och grafräknare har och skulle kunna ha i den svenska gymnasieskolan. Några situationer där grafräknaren används visas och några exempel på forskningsprojekt presenteras.

1. Introduktion

Det finns ett flertal forskningsrapporter och undersökningar där forskare drar slutsatsen att en ökad andel problemlösning och arbete med öppna frågeställningar i matematik är positivt för elevernas inlärning utan att vara negativt för rutinarbetet. Ett exempel på en sådan undersökning är ADM-projektet i Uppsala [1]. Lars-Erik Björk och Hans Brolin har i sin forskning påvisat resultat där en mindre förändring av tidsplaneringen gav ett positivt resultat på ett efterföljande test. Försöksklasserna hade markant bättre resultat än kontrollklasserna på de förståelseinriktade testen och lika bra resultat på testen som avsåg rutinarbete. ADM-projektet kommenteras utförligare i kapitel 5.

Men om man nu vet att problemlösning är bra, vilken typ av uppgifter och vilken typ av problemlösning bör man då använda, och vad menar vi egentligen med *problemlösning*?

2. Problemlösning

Vad kännetecknar problemlösning i matematik? En svårighet med att definiera begreppet är att det är relativt, dvs det som är problemlösning för en person behöver inte vara det för en annan. En definition som jag tycker bra om är den som Alan Schoenfeld [9] beskriver och som är hämtad ur *Oxford English Dictionary*: “**Problem**. A doubtful or difficult question; a matter of inquiry, discussion, or thought; a question that exercises the mind.” Fritt översatt: “En oviss eller svår uppgift; föremål för undersökning, diskussion eller eftertanke; en uppgift som motionerar intellektet.”

Om detta appliceras på elever i gymnasieskolan innebär problemlösning i matematikundervisningen alltså uppgifter som inte är rutinarbete eller standarduppgifter, utan uppgifter där eleverna måste använda sin matematiska kompetens för att analysera och diskutera lösningsidéer.

Med hjälp av två geometriska exempel vill jag påvisa den skillnad som finns mellan en problemlösningssuppgift och en uppgift som för de flesta elever på gymnasiet inte innebär problemlösning:

1. Du har en triangel med sidlängderna 3, 6 och 8cm. Beräkna den största vinkeln.
2. Du har en cirkel med radien 3cm given. Markera slumpmässigt tre punkter på cirkelperiferin. Sammanbind punkterna till en triangel. Hur ska punkterna väljas för att den inskrivna triangelns area ska bli så stor som möjligt?

Uppgift 1 är en typisk uppgift i geometri i gymnasiets D-kurs, ofta placerad direkt efter rubriken "Cosinussatsen". Den kan betraktas som en standarduppgift. Uppgift 2 däremot kräver en hel del undersökning och diskussion för att kunna lösas, en typisk problemlösningssuppgift.

I programmålen för naturvetenskapsprogrammet [12] står bland annat följande krav på utbildningen:

Skolan har ansvar för att eleverna efter fullföljd utbildning

- kan formulera problem, ställa upp hypoteser och föreslå lösningar,
- kan utnyttja teorier och modeller i sitt tänkande och inse betydelsen av successiv utveckling av modeller,
- kan utveckla sin förmåga att utnyttja matematiska modeller och inse deras möjligheter och begränsningar,
- kan använda datorer som ett verktyg i studier och arbete,

Kraven på elevernas förmåga att lösa problem och att använda matematiska modeller och tekniska hjälpmedel är således stora.

I beskrivningen av matematikämnet i kursplanen för naturvetenskapsprogrammet [11] betonas också vikten av problemlösning och förtrogenhet med tekniska hjälpmedel:

Tillgången till nya tekniska hjälpmedel förändrar delvis matematikens innehåll och metoder. Många rutinoperationer, främst av numerisk och grafisk karaktär, kan nu utföras av miniräknare och datorer.

...

Problemlösning, användning av matematiska modeller, kommunikation och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av matematikämnet som skall belysas i undervisningen.

En tolkning av de två citaten ovan är att problemlösning, vid behov med hjälp av grafräknare eller motsvarande, bör vara av central betydelse i skolmatematiken.

3. Grafräknaren

Miniräknare finns av många olika slag. De kan delas in i fyra huvudtyper:

1. Aritmetisk räknare. I princip bara de fyra räknesätten.
2. Tekniska räknare. Ett stort antal standardfunktioner inkluderat trigonometri, statistik och flera minnesfunktioner.
3. Grafitande räknare (grafräknare). Utöver den tekniska räknarens funktioner klarar grafräknaren också att rita grafer. Den har också ett betydligt större fönster än de två första varianterna. Grafräknaren har även ett större antal specialfunktioner som till exempel matrishantering, ekvationslösning och programmeringsmöjligheter.
4. Symbolhanterande räknare. Denna typ är ännu så länge ganska ovanlig i skolorna. Den är ett mellanting mellan en grafräknare och en bärbar dator med programvara för matematik. Som namnet anger kan den förutom det som grafräknaren kan också utföra symbolisk manipulation av algebraiska uttryck. Den har ett fullständigt tangentbord i liten skala.

Den grafitande miniräknaren används på de matematikintensiva programmen i den svenska gymnasieskolan. På motsvarande utbildningar i England genomfördes ett projekt i början av nittioalet. Där användes grafräknaren enligt Kenneth Ruthven [8] i huvudsak till tre olika saker:

1. för att utföra rutinberäkningar och grafitning
2. för att möjliggöra ett numeriskt eller grafiskt sätt att närma sig en ny matematisk idé i stället för eller parallellt med ett symboliskt
3. för att stimulera arbete med öppna frågeställningar med avsikt att främja undersökande och reflekterande verksamhet

Det ligger nära till hands att anta att denna indelning passar även för den svenska systemet. I denna artikel ligger fokus på den grafitande funktionen och inte så mycket på aritmetiska användningsätt.

Flera forskare anser att förutsättningarna för matematikundervisningen har förändrats *drastiskt* av att grafräknaren finns tillgänglig för eleverna. Heidi Pomerantz säger: "The reality is that calculators are valuable educational tools that allow students to reach a higher level of mathematical power and understanding" [7]. Tillgängligheten kan inte heller ifrågasättas enligt Lucia Grugnetti och François Jaquet: "It is no longer a question of accepting or rejecting the new technology, but rather of determining its place in the teaching of mathematics"[3].

Grafräknarens uppgift i problemlösningsarbetet blir att fungera dels som ett bra verktyg för att komma runt matematiska svårigheter som annars skulle kunna stoppa eleverna (se exempel 1: *Lastbilen*), dels att som en katalysator som inspirerar till olika sätt att angripa ett problem (se exempel 2: *Trigonometri*).

När grafräknare fungerar som ett verktyg (typ 1 enligt Ruthven) utför den saker som eleven i vanliga fall antingen skulle ha utfört för hand (på en avsevärt kortare tid), eller också inte ha gjort överhuvudtaget. Att rita upp en graf till ett tredjegradspolynom klarar eleverna av att göra för hand, men det är svårt att använda en handritad graf för att lösa en tredjegrads ekvation, bland annat för att noggrannheten inte är speciellt hög.

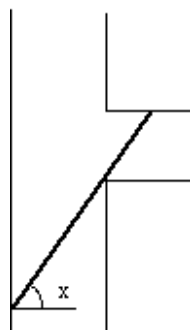
Grafräknaren som katalysator (typ 3 enligt Ruthven) skiljer sig inte nämnvärt från verktygsvarianten när det gäller vad som utförs. Skillnaden ligger hos användaren och i arbetsuppgifterna. Här använder eleven grafräknaren för att bilda sig en uppfattning om problemet och för att få idéer om olika angreppssätt.

4. Problemen

Problemlösning med grafräknare fungerar bra inom ett flertal områden. Uppgifter med verklighetsanknytning såväl som inommatematiska uppgifter. Det man först tänker på är förstås uppgifter där man arbetar med grafer på olika sätt. Några exempel:

Exempel 4.1. *Lastbilen* [4]

En lastbil kör längs en 10 m bred gata. Den ska så svänga av på en annan, 7 m bred gata. Hur lång kan lastbilen maximalt vara för att den inte ska komma upp på trottoarerna? Efter ett antal förenklande antaganden (bortse från lastbilens bredd mm) finner eleven att maximal längd fås för den vinkel x som ger kortast avstånd enligt linjen i figur 1. Detta kan skrivas så att den del av linjen som finns på den bredare gatan beskriver en triangel med en vinkel (x) känd. Hypotenusan i den triangeln får då längden $\frac{10}{\cos x}$. På samma sätt kan hypotenusan i den lilla triangeln som bildas skrivas som $\frac{7}{\sin x}$. Linjens längd kan alltså beskrivas med funktionen $l(x) = \frac{10}{\cos x} + \frac{7}{\sin x}$. En snabb skiss på en grafräknare gör att man kan avläsa vinkeln $x \approx 0.7$ där

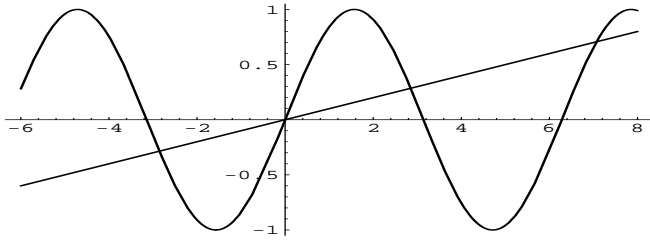


FIGUR 1. Förenklad figur.

funktionsvärdet har sitt minimum, vilket ger att lastbilens maximala längd blir ungefär 24 m. Eleven kan nu diskutera den matematiska modellen och vilka antaganden man har gjort, hur man tar med lastbilens bredd i räkningen och så vidare. Min uppfattning är att om eleven får i uppdrag att minimera funktionen $l(x)$ genom att derivera funktionen så kan algoritmen skymma matematiken genom att eleverna fokuserar på deriveringsalgoritmen i så hög utsträckning att de inte ser den övergripande matematiska idén. När eleven har arbetat med uppgiften enligt ovan och fått en möjlighet att förstå matematiken i den, *då* är det dags att försöka lösa uppgiften exakt. Här fungerar grafräknaren som ett kraftfullt hjälpmedel vilket ger eleven möjlighet att lösa uppgiften även om han/hon inte kan derivera funktionen eller inte kan genomföra nödvändiga algebraiska förenklingar.

Exempel 4.2. Trigonometri

Diskutera hur antalet lösningar till ekvationen $\sin x = kx$ beror på värdet av variabeln k .



FIGUR 2. $\sin x = 0, 1x$

Eleven kan med stöd av att rita grafer liknande den i figur 2 resonera sig fram till slutsatser av denna typ:

- i:* det kan bara finnas ett udda antal lösningar
- ii:* om $k \geq 1$ finns det bara en lösning
- iii:* för vissa värden på k är linjen tangent till sinuskurvan
- iv:* $k = \frac{1}{2}$ och $k = -\frac{1}{2}$ ger olika antal lösningar

Denna typ av diskussion med utgångspunkt i grafen kan ge eleven nya idéer och sätt att angripa problemet.

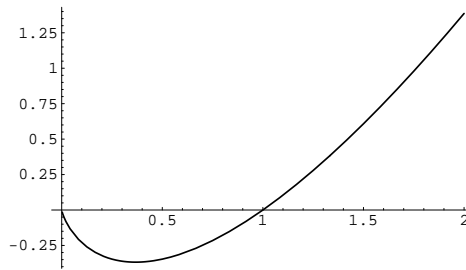
Grafräknarens roll i denna uppgift är att vara en katalysator, dvs ge eleven en möjlighet att betrakta problemet på flera sätt. Eleven kan då få olika idéer om hur lösningen kan se ut och om hur man kan angripa uppgiften.

Exempel 4.3. Logaritmekvation

Betrakta funktionen $f(x) = t + x \ln x$. För vilka positiva värden på t har funktionen två skilda nollställen?

En elev som jag iakttog och diskuterade med arbetade med denna uppgift. Han började med att sätta $t = 1$ och rita grafen för att se hur grafen såg ut. Detta för att se var funktionen har exakt ett nollställe. Eleven sade att han egentligen inte visste varifrån han fick $t = 1$. En förklaring kan vara att 1 är ett vanligt värde på konstanter. När han såg grafen till $y = 1 + x \ln x$ så han “ t måste ligga mellan 0 och 1”.

Han såg att t måste vara positiv ur uppgiften. Efter detta började han prova sig fram till det värde på t som gav precis ett nollställe. Han ritade först $y = 0 + x \ln x$ (figur 3) och kunde avläsa att t borde vara lite mindre än 0,5. Efter ett antal tester hittade han ett närmevärde, $t \approx 0,37$. När han ritade grafen till $y = 0,37 + x \ln x$ insåg han att det inte var exakt rätt. Han insåg också att om man provar fler gånger så



FIGUR 3. $y = 0 + x \ln x$

kan man hitta ett bättre närmevärde, men det kommer inte heller att bli exakt rätt. Nu frågade eleven mig “hur får man fram exaktvärdet?” Eleven blev intresserad av att lösa uppgiften algebraiskt efter att ha undersökt uppgiften med en grafräknare. Den traditionella metoden att lösa denna uppgift är att ta fram minimivärdet till funktionen $y = x \ln x$ och sedan använda detta för att ta fram t . Eleven som jag följde hade troligen inte klarat detta utan mycket tydlig handledning från min sida.

Dessa tre exempel indikerar några av de fördelar och möjligheter som grafräknaren kan medföra vid problemlösning. Grafräknarens dubbla funktion både som katalysator och som verktyg kommer fram mycket tydligt i det sista exemplet. Eleven tittar först på ett exempel för att bilda sig en uppfattning om hur funktionen uppträder (*katalysator*) och provar sig sedan fram till ett närmevärde till lösningen (*verktyg*). Eleven kunde på egen hand få fram ett värdefullt resultat. Exemplet visar också den affektiva påverkan som grafräknaren kan ha: eleven ville lösa uppgiften exakt när han såg att grafräknaren gav närmevärden.

5. Några forskningsexempel

Det finns många exempel på intressant forskning inom detta område. Jag kommer här att beskriva tre forskningsprojekt med olika fokus. Det första (Jan Wyndham) har sin tyngdpunkt på problemlösning, det andra (ADM-projektet) på tekniska hjälpmedel och det tredje (Anna Sfarid och Uri Leron) på kombinationen av tekniska hjälpmedel vid problemlösning.

5.1. **Jan Wyndham.** Inställningen till problemlösning i skolan har förändrats med tiden i Sverige. Utvecklingen har gått från att på 60-talet varit undervisning *för* problemlösning till att under 80-talet vara undervisning *om* problemlösning. Undervisning *för* problemlösning innebär att eleven ska lära sig ett antal metoder och angreppssätt för att kunna lösa vissa typer av problem. Detta fungerar bra om problemen är någorlunda standardiserade, men svårigheter uppstår när andra problemtyper ska behandlas. I undervisning *om* problemlösning ska eleven reflektera över hur han/hon själv tänker och arbetar för att få kontroll över sitt arbete. Detta innebär att eleven bör vara medveten om sitt eget arbete i relation till t. ex. de fyra faserna i Polyas [6] problemlösningssprocess.

Jan Wyndham förespråkar i sin avhandling [13] undervisning *via* problemlösning, en strategi som också är grunden till det som brukar kallas PBL, problembaserat lärande. Detta är en klart konstruktivistisk tanke som har sitt ursprung i Piaget och som förespråkas av många nutida forskare, t.ex. Paul Ernest [2]. Problemlösningen skall alltså vara den grund varpå eleven konstruerar sin egen kunskap, den katalysator som sätter igång tankeprocessen hos eleven när han eller hon möter ett nytt matematiskt begrepp.

Wyndham har också studerat elever som arbetar tillsammans med problemlösning. Han visar att det ofta inte går att avgöra *vem* i ett par som egentligen löser ett problem, utan den nya kunskapen som uppkommer i en problemlösningssituation är ett kollektivt resultat. Detta är enligt Wyndham ett exempel på att 'summan är större än delarna'. Han menar också att problemtexten kan fungera som en kommunikationspartner om en elev arbetar ensam, och på så sätt berika elevens matematiska förmåga.

5.2. **ADM-projektet.** I ADM-projektet undersökte Lars-Erik Björk och Hans Brodin effekterna av att låta elever minska andelen rutinfärdighetsträning. Försöket gick till så att eleverna i försöksklasserna fick dra ner på tiden som användes till grafitning för hand, att hitta extremvärden med hjälp av derivata, ekvationslösning och exakt beräkning av integraler och i stället lägga motsvarande tid på att arbeta med grafräknare eller motsvarande dataprogram (Matematikverkstad av Karl Greger) utifrån ett arbetshäfte. Arbetshäftet finns i tre versioner. Versionen för naturvetenskapliga linjens andra årskurs heter *Funktionslära med Matematikverkstad i NT2*. Häftet innehåller

- grafitning och extremvärdesbestämning
- numerisk ekvationslösning
- ställa upp och beräkna integraler
- problemlösning i olika nivåer
- test

Problemlösningssdelen innehåller övningar på att ställa upp ekvationer och funktioner, övningar på att införa variabler och övningar på att formulera egna problem. Efter försöksperioden utfördes ett test i de deltagande klasserna. Samma prov genomfördes också i ca 70 slumpvis utvalda kontrollklasser. Resultaten av den efterföljande testen visade en klar förbättring i försöksklasserna när det gäller förståelseinriktade uppgifter och problemlösning. När det gäller rutinfärdigheterna kan man inte se någon skillnad mellan försöksklasser och kontrollklasser. För utförligare statistik se [1].

Lars-Erik Björk och Hans Brolin drar slutsatsen att “Mathematical toolkit programs can enhance the quality of mathematics education”. Denna slutsats kan delvis kritiserars utifrån att försöksklasserna förutom arbete med datorprogram eller grafräknare också fick ett nytt och annorlunda arbetsmaterial. Det framgår inte av denna rapport [1] hur försöksklasserna valdes ut. Lärarnas inställning till försöket har troligen också påverkat resultatet eftersom positiva och engagerade lärare som får tillfälle att prova nya arbetsmetoder har stora möjligheter att lyckas bra. Det går ej att avgöra om de positiva effekterna kommer av datorprogrammen eller av arbetshäftena. Det kan också vara så att det är kombinationen av dessa två som ger så gott resultat.

5.3. Anna Sfard och Uri Leron. Dessa två forskare diskuterar ett metaproblem i sin artikel *Just give me a computer and I will move the earth: Programming as a catalyst of a cultural revolution in the mathematics classroom* [10]. Metaproblemet (problem om problem) lyder så här:

Vilket av följande två problem är lättare att lösa för elever?

P1: Givet tre punkter i planet, $(2, 3)$, $(-1, 4)$ och $(0, -1)$, bestäm medelpunkt och radie för den cirkel som passerar genom dem.

P2: Skriv ett dataprogram som läser in koordinaterna för tre punkter och returnerar medelpunkt och radie för den cirkel som passerar genom dem.

Svaret på frågan verkar självklar, P1 är lättare eftersom det är ett specialfall av P2. I P2 måste eleven diskutera räkneoperationer utan att utföra dem och beakta en mängd olika möjligheter. När forskarna bedömer uppgifterna med hjälp av elevernas resultat på uppgifterna blir dock svaret det motsatta. Eleverna i försöket hade signifikant högre lösningsfrekvens på P2 än på P1. Sfard och Leron kopplar sitt resonemang till Alan Schoenfelds[9] resonemang om ‘beliefs’, till exempel att “en uppgift som inte kan lösas på 12 minuter är omöjligt”, och säger “the computer turns some of the most deeply-rooted beliefs about mathematics and mathematical problemsolving upside down”. De angriper den allmänt accepterade åsikten att det

finns en direkt koppling mellan en uppgifts komplexitet och elevens förmåga att lösa uppgiften. De menar att denna åsikt måste ifrågasättas.

Enligt min uppfattning så ligger det en hel del i vad Sfard och Leron säger, men de drar väldigt långtgående slutsatser från sitt försök. Jag håller helt med om deras åsikt att kursplaneutvecklare måste i första hand beakta det som de kallar "the pulse of the learning community", atmosfären i klassrummet (fritt översatt), och att kursplaneutvecklarna måste både basera sitt arbete på denna atmosfär och samtidigt försöka påverka den.

6. Diskussion

Problemlösning i matematikundervisningen i den svenska gymnasieskolan är viktig enligt läroplaner och kursplaner. I dessa dokument kan man också läsa att grafräknaren bör ha en central roll i elevernas arbete. Dessa tankar finner man även hos forskare i matematikdidaktik. Det kommer dock att ta lång tid att införa dessa två komponenter i matematikundervisningen så att de blir en naturlig del för både elever och lärare, påpekas av Kenneth Ruthven [8] då han säger " . . . it takes some considerable period for teachers to gain confidence in incorporating technology in their teaching, and to do so with increasing spontaneity rather than through a highly prepared activity".

Kopplingen mellan problemlösning och grafräknare är nästa steg. Existerar en sådan koppling? Hur viktig är den? Hur kan en undervisning som bygger på problemlösning med grafräknare se ut? Dessa och många andra frågor inom detta område är i stort behov av klagörande forskning.

Referenser

- [1] Björk, L-E and Brolin, H: *Using new technology as a tool to increase student understanding of calculus*. Proceedings of the international Conference on Technology in Mathematics Teaching, Edinburgh, (1995).
- [2] Earnest, P: *Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and implications for mathematics education*. Paper presented at the ICME-7 Conference in Québec, (1992)
- [3] Grugnetti, L and Jaquet, F: *Senior Secondary School Practices*. Bishop, A.J. et al. (eds) Int. Handbook of Mathematics Education, p615 - 645, (1996).
- [4] Jacobsson, S, Wallin, H och Wiklund, S: *Matematik Program N, kurs E*. Liber Utbildning AB (1996).
- [5] Lithner, J: *Mathematical Reasoning and Familiar Procedures*. Research Reports No1, 1998 in Mathematics Education. Department of Mathematics, Umeå University.
- [6] Pólya, G: *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press (1945).
- [7] Pommerantz, H: *The Role of Calculators in Math Education*. USI/CPMSA, Superintendents Forum, Dallas, Texas, (1997).

- [8] Ruthven, K: *Calculators in the Mathematics Curriculum: the Scope of Personal Computational Technology*. Bishop, A.J. et al. (eds) Int. Handbook of Mathematics Education, p435 - 468, (1996).
- [9] Schoenfeld, A: *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. (1985).
- [10] Sfard, A och Leron, U: *Just give me a computer and I will move the earth: Programming as a catalyst of a cultural revolution in the mathematics classroom*. International Journal of Computers for Mathematics Learning 1:189-195, Kluwer Academic Publishers, (1996).
- [11] Skolverket: *Kursplaner -95, Naturvetenskapsprogrammet*. Skolverket, GyVux 1994/95:14.
- [12] Skolverket: *Programsmål - Naturvetenskapsprogrammet*. Internet:
<http://www.skolverket.se/d/nytt/kursplan/gyskola/nvmal.htm>
- [13] Wyndham, J: *Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice*. Lindköping University, Kanaltryckeriet i Motala AB (1993).

E-mail address: tomas.bergqvist@math.umu.se